



Philosophia Scientiæ

Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

18-1 | 2014

Standards of Rigor in Mathematical Practice

D'un point de vue rigoureux et parfaitement général : pratique des mathématiques rigoureuses chez Richard Dedekind

Emmylou Haffner



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/919>

DOI : 10.4000/philosophiascientiae.919

ISSN : 1775-4283

Éditeur

Éditions Kimé

Édition imprimée

Date de publication : 15 mars 2014

Pagination : 131-156

ISBN : 978-2-84174-665-1

ISSN : 1281-2463

Référence électronique

Emmylou Haffner, « D'un point de vue rigoureux et parfaitement général : pratique des mathématiques rigoureuses chez Richard Dedekind », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 18-1 | 2014, mis en ligne le 15 mars 2017, consulté le 21 décembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/919> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.919>

Tous droits réservés

D'un point de vue rigoureux et parfaitement général : pratique des mathématiques rigoureuses chez Richard Dedekind

Emmylou Haffner

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité,
SPHere, UMR 7219 (France)

Résumé : Dans cet article, je considère la pratique et la conception de la rigueur chez Richard Dedekind qui se dégagent de l'étude d'une sélection de ses travaux les plus importants. Une analyse des mentions multiples de réquisits de rigueur dans les textes de Dedekind amène à constater qu'il lie très étroitement la rigueur à la généralité. La première partie de l'article donne à voir les liens serrés tissés par Dedekind entre généralité et rigueur, dans sa théorie des fonctions algébriques co-écrite avec H. Weber, ainsi que dans ses travaux fondationnels et dans ses travaux de théorie des nombres. Dans la seconde partie, j'examine les critères de rigueur qui apparaissent dans la pratique mathématique de Dedekind. Je discute l'idéal logique de rigueur dans l'essai de Dedekind sur les entiers naturels, étudié par M. Detlefsen sous l'appellation « Dedekind's principle » ; puis je m'intéresse à la stratégie de Dedekind pour arithmétiser les mathématiques afin de mettre en évidence qu'il ne s'agit pas d'une approche guidée par un principe purement logique. Ainsi, l'idéal logique de rigueur apparaît comme intimement lié à la pratique d'une autre norme épistémique : la généralité, en lien avec la quête, par Dedekind, de définitions et preuves générales. Dans la dernière partie, j'analyse la demande de généralité et la pluralité de conceptions de la généralité que recouvre cette demande, et termine en mettant en avant la relation des définitions aux preuves et de quelle manière une définition générale se pose en condition de rigueur dans les mathématiques dedekindiennes.

Abstract: In this paper, I study Richard Dedekind's practice of rigor in a selection of his most important works. The analysis of the various occurrences of rigor requirements in his mathematics leads to observe that rigor, for him, is closely related to generality. The first part of the paper shows evidences of the tight links woven by Dedekind between generality and rigor in his theory

of algebraic functions co-written with H. Weber, as well as in his foundational essays and his work on algebraic number theory. In the second part, I examine criteria of rigor in Dedekind's practice of mathematics, so as to shed light on his conception of rigor. I discuss, first, the logical ideal of rigor in Dedekind's book on natural numbers, studied by M. Detlefsen as "Dedekind's principle", and, secondly, I look at Dedekind's strategy of arithmetization of mathematics to exhibit how it is not solely driven by a rigid logic. Seen in this light, then, the logical ideal of rigor appears to be intimately related to the practice of another epistemic value: generality. This, I argue, is strongly linked to Dedekind's research of general definitions and proofs. Finally, in the last part, I analyze the requirements for generality and the multiple conceptions of generality sustaining this demand, and I proceed to unfold the relationship between definitions and proofs and how a general definition appears to be a condition for rigorous mathematics according to Dedekind.

1 Introduction

Lorsque Felix Klein décrit, en 1895, le mouvement d'arithmétisation de l'analyse qui a parcouru les mathématiques de Kronecker à Peano, via Weierstrass, c'est un mouvement de rigorisation radicale qu'il dépeint. Une peinture dont il ne souhaite pas tracer les détails, et dont il retient la « rigueur weierstrasienne » (*Weierstrass'sche Strenge*), le réductionnisme de Kronecker, l'insistance des tenants de l'arithmétisation sur la nécessité de la logique sous-jacente à l'arithmétique pour s'assurer de la clarté et de la rigueur des mathématiques. Bref, c'est la *rigidité logique* que Klein choisit de retenir de l'arithmétisation :

Comme essence même de la question, ce n'est pas la forme arithmétique de la marche des idées que j'envisage, mais plutôt la rigidité logique obtenue à l'aide de cette forme. [Klein 1895, trad. Vassilieff et Laugel 1897, légèrement modifiée, 117]

On sait bien pourtant que si l'on interroge les motivations des grands acteurs de l'arithmétisation¹, c'est un camaïeu de raisons que l'on aura en main, du rejet de l'intuition à des convictions très fortes sur l'ontologie des mathématiques. Ils ont en commun une volonté de promouvoir une stricte rigueur, certes, mais au nom de quelle rigueur préchent-ils ?

1. Pour une présentation plus large du mouvement d'arithmétisation de l'analyse dans son sens communément accepté de rigorisation des fondements de l'analyse et rejet de l'intuition, on pourra consulter [Jahnke & Otte 1981], [Epple 2003] et [Petri & Schappacher 2007]. Par ailleurs, Schappacher dans [Schappacher 2010] propose une interprétation intéressante de l'arithmétisation, liant la définition des réels à celle du point d'une surface de Riemann dans l'article co-écrit par Dedekind et Heinrich Weber en 1882. Le point de vue que j'adopterai concernant l'arithmétisation dans l'œuvre de Dedekind se détache des études menées jusqu'ici, puisque je proposerai de l'envisager sous un angle plus systématique et d'interroger effectivement la conception de l'arithmétique qui soutient cette démarche — question jusqu'ici passée sous silence.

Dans cet article, je propose d'interroger la pratique de la rigueur dans les mathématiques de Richard Dedekind (1831-1916), dont les essais sur les fondements des mathématiques, et tout particulièrement la construction des réels au moyen des coupures en 1872 dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Dedekind 1872]², illustrent parfaitement les réflexions de Klein. L'exigence de rigueur est une composante explicite et essentielle de sa démarche, au-delà de *Stetigkeit*. Aussi, je ne restreindrai pas l'étude aux travaux fondationnels. Se pose alors la question de l'enjeu plus large de l'arithmétisation. Nous verrons que Dedekind affirme fréquemment que le but de ses travaux est de donner une fondation rigoureuse et d'atteindre une plus grande généralité dans la définition de certaines notions ou dans l'exposition d'une théorie. Il met ainsi en avant une relation à éclaircir entre généralité et rigueur. En puisant dans son corpus mathématique comme dans ses écrits fondationnels, je tenterai de dénouer ces liens, d'en comprendre les raisons et ressorts. Il s'agira alors de montrer et d'expliquer de quelle manière l'idéal logique de rigueur est modulé en fonction d'une pratique commandée par une autre norme épistémique : celle de généralité.

Je proposerai dans un premier temps d'étudier quelques-uns de ses travaux les plus importants, dans lesquels Dedekind noue étroitement la demande de rigueur à celle de généralité. Puis, je tenterai d'éclairer sa conception de la rigueur, en discutant l'idéal de rigueur, son rôle dans la pratique du mathématicien et son articulation avec l'arithmétisation. Enfin, je me tournerai vers la question de la généralité, je montrerai que l'exigence de Dedekind de satisfaire à une demande forte de généralité recouvre une conception plurielle de la généralité et déploiera son articulation avec la pratique de mathématiques rigoureuses.

2 Généralité et rigueur

2.1 Théorie des fonctions algébriques

En 1882, paraît *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*³ (« Théorie des fonctions algébriques d'une variable ») dans le *Journal für reine und angewandte Mathematik*, un article co-écrit par Dedekind et Heinrich Weber (1842-1913). Le but des deux mathématiciens est de mettre en place

2. Je désignerai par la suite cet ouvrage par *Stetigkeit*.

3. Je désignerai par la suite cet article par *Algebraische Funktionen*. Pour une présentation du contenu mathématique de cet article, on pourra se référer à [Geyer 1981], [Strobl 1982], à l'introduction de [Stillwell 2012], ainsi qu'à [Houzel 2002], qui offre également une mise en perspective avec le contexte historico-mathématique en géométrie algébrique. Cependant, le contenu mathématique en lui-même n'est pas au centre de mon argumentation, qui vise à expliciter les motivations épistémologiques qui ont incité à et guidé sa rédaction — questions qui n'intéressent les auteurs de ces études historiques que de manière tangente.

une approche nouvelle de la théorie des fonctions algébriques⁴ telle qu'inventée par Bernhard Riemann en 1851 [Riemann 1851, 3–45] repr. in [Riemann 1876-1902], et de proposer ainsi une nouvelle définition de la notion de surface de Riemann. Cet article, longtemps considéré comme une simple application de la théorie des nombres aux fonctions, prend naissance dans le souci de Dedekind et Weber de rendre les travaux de Riemann et de ses héritiers plus clairs et plus rigoureux.

Dedekind écrit, dans la biographie de Riemann qui accompagne ses *Gesammelte Mathematische Werke* parues en 1876, que celui-ci possédait une puissance de pensée et une imagination brillantes qui ne le rendaient pas toujours facile à suivre. Les intuitions fulgurantes de Riemann laissent peu de place à la rigueur. Dedekind était étudiant à Göttingen en même temps que Riemann et a suivi ses cours jusqu'en 1858⁵. Weber, quant à lui, était un spécialiste reconnu des mathématiques riemanniennes, choisi pour seconder Dedekind dans l'édition des *Œuvres* de Riemann après la mort prématurée d'Alfred Clebsch en 1872. Tous deux familiers des travaux de Riemann, ils souhaitent clarifier son œuvre et lui donner la rigueur qu'ils considèrent indispensable à la bonne compréhension et au bon développement des mathématiques. Dedekind avoue même à Weber qu'il ne sera sûr de maîtriser les travaux de Riemann que lorsqu'il sera venu à bout « de toute une série d'obscurités, avec la rigueur coutumière à la théorie des nombres⁶ ».

Dans leur article de 1882, Dedekind et Weber proposent une présentation donnant, d'après eux, un fondement plus clair et général, et plus rigoureux aux travaux de Riemann :

Dans les recherches suivantes, nous nous donnons comme objectif de fonder la théorie des fonctions algébriques d'une variable, l'un des plus importants résultats de la création de Riemann, d'un point de vue qui soit à la fois simple, rigoureux et parfaitement général⁷. [Dedekind & Weber 1882, 238]

Dedekind et Weber expriment leur insatisfaction face aux traitements donnés par les mathématiciens qui avaient jusque-là travaillé sur la théorie riemannienne des fonctions et admettent des théorèmes sur la seule évidence de l'intuition géométrique ou font des hypothèses trop restrictives sur les singularités des fonctions. Dedekind et Weber sont parvenus à la conclusion que :

4. Une fonction algébrique θ d'une variable indépendante z est une fonction satisfaisant une équation polynomiale $F(\theta, z) = 0$ dont les coefficients sont des polynômes.

5. De nombreux détails historiques et épistémologiques sur les relations entre Riemann et Dedekind peuvent être trouvés dans [Ferreirós 2007].

6. "I am not the profound expert on Riemann's work that you take me to be. I certainly know those works, and I believe in them, but I do not master them, and I will not master them until having overcome in my way, with the rigor that is customary in number theory, a whole series of obscurities", trad. dans [Ferreirós 2007, 78].

7. La traduction de *Algebraische Funktionen* utilisée tout au long de cet article est la mienne. Je tiens à remercier Karine Chemla pour son aide précieuse. Les pages réfèrent à la version originale reproduite dans [Dedekind 1930-1932, vol. 1, 238–350].

il est possible d'obtenir une base plus sûre pour les notions fondamentales, ainsi que pour un traitement général et sans exception de la théorie, si l'on part d'une généralisation de la théorie des fonctions rationnelles d'une variable. [Dedekind & Weber 1882, 238]

Leur article, long d'une centaine de pages et extrêmement technique, est le chemin qui mène à ladite base plus sûre et à une définition qu'ils considèrent comme parfaitement précise, générale et rigoureuse de la notion de point d'une surface de Riemann. Pour atteindre cette définition, ils utilisent les méthodes introduites par Dedekind en théorie des nombres algébriques et « tirées de la création par Kummer des nombres idéaux » qui peuvent être « transférées à la théorie des fonctions » [Dedekind & Weber 1882, 238–239], puisque l'on peut définir, de manière analogue à la théorie des nombres, les notions de corps et d'idéaux de fonctions algébriques⁸. Ainsi, écrivent-ils que

sur la base [des] idéaux premiers, on arrive à une définition parfaitement précise et générale du « point d'une surface de Riemann », c'est-à-dire un système parfaitement déterminé de valeurs numériques qui peuvent être données sans contradiction par les fonctions du corps. [Dedekind & Weber 1882, 240]

Le point d'une surface de Riemann, ici, est défini en termes des fonctions du corps considéré, comme une assignation de valeurs (constantes) aux fonctions. La définition de la surface de Riemann donnée par Dedekind et Weber s'appuie alors sur la possibilité d'établir une correspondance bi-univoque entre idéaux du corps et complexes de points. Elle met ainsi en jeu des notions bien définies, en ne faisant intervenir aucune intuition (géométrique ou de quelque

8. La notion de corps en théorie des nombres est définie de la manière suivante :

J'appellerai *corps* tout système A de nombres a (ne s'annulant pas tous), tel que les sommes, les différences, les produits et les quotients de deux quelconques de ces nombres a appartiennent au système A . [Dedekind 1876, § 14]

En théorie des fonctions algébriques, la notion de corps est présentée ainsi :

De manière analogue à la théorie des nombres, on entend par corps de fonctions algébriques un système de ces fonctions de telle nature que l'application des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique aux fonctions de ce système donne encore une fonction de ce système. [Dedekind & Weber 1882, 239]

Pour la définition d'un idéal en théorie des nombres algébriques, cf. § 2.3 ci-dessous. Pour la théorie des fonctions algébriques, la définition d'un idéal est similaire à celle donnée pour les nombres algébriques, avec le mot « fonction » remplaçant chaque occurrence de « nombre ». Soulignons, par ailleurs, que Dedekind parle des idéaux *du corps*. Bien qu'il introduise une notion formellement équivalente à celle d'anneau, les ordres (*Ordnungen*), celle-ci n'a pas le rôle et l'importance attribués aux anneaux aujourd'hui. De plus, les ordres ne sont *pas* utilisés en théorie des fonctions algébriques. Je conserverai donc cette manière de présenter, rendue possible par le cadre extrêmement restreint dans lequel travaille Dedekind.

autre sorte) et aucune notion trop vague ou mal connue, et sans considérations *a priori* sur les singularités des fonctions. La présentation des motivations épistémologiques faite dans l'introduction de l'article de 1882 articule sans distinction généralité et rigueur. Il apparaît alors qu'une définition n'est admissible comme définition rigoureuse que si elle satisfait des critères stricts de généralité.

Ces considérations ne sont toutefois pas réduites à la théorie des fonctions algébriques et à une réaction à l'encontre des héritiers de Riemann. Des exigences semblables sont avancées à de nombreuses reprises dans les textes de Dedekind.

2.2 Travaux fondationnels

Dedekind introduit son essai de 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen*?⁹, en soulignant que jusque dans les fondements de « la plus simple des sciences » [Dedekind 1888, Préface à la première édition, 133]¹⁰, un certain manque de rigueur persiste en mathématiques. Ainsi, on considère, à tort, certaines notions comme évidentes, simples, données par l'intuition interne ou l'intuition géométrique, et l'on omet des définitions ou même de prouver certains résultats.

Déjà en 1872, dans la préface à *Stetigkeit*, Dedekind remarquait que « l'Arithmétique manque d'un fondement réellement scientifique » [Dedekind 1872, 59]. Pour établir une base proprement scientifique et respecter ainsi les exigences strictes de Dedekind, il n'est bien sûr pas autorisé de se reposer sur des théorèmes qui ne sont pas proprement démontrés, sur des hypothèses d'existence illicites, ou encore — c'est le premier moteur de la démarche d'arithmétisation de l'analyse — d'avoir recours à l'évidence ou à l'intuition géométrique [Dedekind 1872, 60]. Dedekind s'évertue alors à trouver un « fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux aux principes du Calcul infinitésimal » [Dedekind 1872, 59–60], ce qu'il considère avoir accompli de manière complètement satisfaisante une fois qu'il a défini ses fameuses coupures, outils ne nécessitant de supposer que l'existence des nombres rationnels et permettant aux nombres irrationnels d'être « définis d'un seul coup et — ce qui est le plus important — dans leur complétude (continuité), propriété qui est suffisante et en même temps, indispensable pour édifier de manière absolument rigoureuse et scientifique l'arithmétique des nombres irrationnels » [Benis Sinaceur 2008, Lettre à Lipschitz, 27 juillet 1876, 279]. Ainsi, la définition donnée aux nombres irrationnels est à la fois rigoureuse et générale : une définition unique pour *tous* les nombres, permettant de poser des bases solides pour le calcul avec les irrationnels, et pour les recherches sur la continuité.

9. Je désignerai par la suite cet ouvrage par *Zahlen*.

10. Toutes les traductions des travaux fondationnels et des extraits de correspondance sont celles de Hourya Benis Sinaceur dans [Benis Sinaceur 2008]. Toutes les références des citations de ces travaux renvoient au livre de H. Benis Sinaceur.

Lorsqu'il s'agit de définir la suite des nombres naturels, les réquisits de généralité sont plus que manifestes. Ayant constaté le manque de démonstrations rigoureuses aux fondements mêmes de l'arithmétique des nombres naturels, Dedekind propose de définir la suite des entiers naturels sur la base des concepts généraux de système et de représentation (*Abbildung*). Dedekind, comme il l'explique à Keferstein dans sa lettre du 27 février 1890¹¹, souhaite

subordonner [les propriétés fondamentales de la suite N] aux concepts généraux et aux activités de l'entendement *sans* lesquels nulle pensée n'est possible et *grâce* auxquels le fondement est donné pour des démonstrations sûres et complètes et pour la formation de définitions de concepts non contradictoires.
[Benis Sinaceur 2008, 305]

Ainsi « dépouillées de leur caractère spécifiquement arithmétique » [Benis Sinaceur 2008, 305], les propriétés de la suite des nombres naturels peuvent être données, après de longues considérations techniques, par une définition ensembliste (dans le vocabulaire de Dedekind, « logique »). La définition qui en résulte est même parfaitement générale puisque Dedekind parvient à démontrer ce que l'on appelle aujourd'hui le théorème de catégoricité de (sa version de) l'arithmétique du second ordre, affirmant par là (à rebours d'une interprétation de théorie des modèles) que

il est évident que toute proposition sur les nombres, i.e., les éléments n du système N simplement infini ordonné par la représentation φ , à vrai dire toute proposition dans laquelle on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments et ne considère que les concepts issus de l'ordre φ , est valide *de manière tout à fait générale pour tout autre système simplement infini*. [Dedekind 1888, 201, je souligne]

En prenant soin de ne pas placer les propriétés arithmétiques au fondement de la définition des nombres, on assure finalement la rigueur de la définition des bases de l'arithmétique elle-même, puisque l'on évite les raisonnements circulaires. L'arithmétique pour Dedekind est la *science des nombres*, et pour qu'elle repose effectivement sur une fondation rigoureuse, il faut lui donner un objet qui soit défini sans recours aux propriétés intrinsèquement arithmétiques, en particulier celles impliquant les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique rationnelle. En effet, pour Dedekind, les opérations arithmétiques sont définies par les facteurs sur lesquels elles agissent et nécessitent leur définition préalable.

On voit se dessiner plus précisément un lien tissé par Dedekind entre rigueur et généralité : une définition fondée sur des concepts généraux garantit, selon lui, des démonstrations « sûres et complètes ». Baser le concept de nombre naturel même, le plus élémentaire de l'arithmétique, sur les notions

11. Voir [Benis Sinaceur 2008, 304–311].

parfaitement générales de système et de représentation permet des fondations qui assurent que l'on évite les lacunes, et la mise en jeu de circularités ou de notions trop vaguement définies dans les définitions suivantes (telles celles des opérations et les extensions du concept de nombre) et les raisonnements en découlant.

2.3 Idéaux et théorie des entiers algébriques

En 1876, Rudolf Lipschitz invite Dedekind à publier, dans le *Bulletin des sciences astronomiques et mathématiques* de Darboux, une présentation de sa théorie des entiers algébriques. Dans *Sur la théorie des nombres entiers algébriques*¹², publié en français en quatre parties en 1876 et 1877, Dedekind propose « d'établir les lois générales de la divisibilité » [Dedekind 1876, Introduction, 278–279] qui régissent le système des entiers algébriques d'un corps de nombres algébriques¹³.

Le problème auquel s'intéresse Dedekind est l'unicité de la décomposition en facteurs premiers pour les entiers algébriques — la plus haute généralisation du concept d'entier [Dedekind 1876, Introduction]. L'entreprise de Dedekind est une généralisation des résultats de Kummer qui, dans ses recherches sur les nombres cyclotomiques, a remarqué que « l'analogie observée jusqu'ici avec l'ancienne théorie [des entiers rationnels] menace de se rompre pour toujours » [Dedekind 1876, Introduction, 281], car la décomposition n'est plus unique. Kummer a pu rétablir l'unicité pour les entiers cyclotomiques en introduisant les nombres idéaux. Dedekind souhaite répondre à la question amenée naturellement par le succès de Kummer pour les nombres cyclotomiques : ces lois de divisibilité sont-elles généralement valides, c'est-à-dire valides dans « tous les domaines numériques de l'espèce la plus générale » [Dedekind 1876, Introduction, 283] (i.e., les domaines d'entiers algébriques)¹⁴ ?

Pour parvenir à la « théorie générale et sans exception » [Dedekind 1876, Introduction, 283], il est nécessaire d'abandonner la démarche plus formelle de Kummer, car si sa découverte est « vraiment grande et féconde » [Dedekind 1876, Introduction, 282], sa généralisation ne s'opère pas sans difficultés :

12. Cet article est une version remaniée du Supplément X aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet, publiées en 1871 par Dedekind et rééditées en 1879 et 1894. Dans ces trois éditions, Dedekind présente sa théorie des entiers algébriques dans les suppléments (Supplément X en 1871, Supplément XI en 1879, une version similaire à la publication en français, et 1894). Chaque version est considérablement remaniée par rapport aux précédentes.

13. θ est un nombre algébrique lorsqu'il satisfait une équation polynomiale à coefficients rationnels ; il est dit un entier algébrique lorsqu'il satisfait une équation polynomiale à coefficients entiers.

14. Kronecker, comme on le sait, aborde la même question avec une approche extrêmement différente. On pourra consulter [Edwards 1980] pour une comparaison de leurs approches.

[i]l est (...) à craindre d'abord que, par le mode d'expression que l'on a choisi, dans lequel on parle de nombres idéaux déterminés et de leurs produits, et aussi par l'analogie présumée avec la théorie des nombres rationnels, on ne soit entraîné à des conclusions précipitées et par là à des démonstrations insuffisantes, et en effet cet écueil n'est pas toujours complètement évité. [Dedekind 1876, Introduction, 283]

De plus, il est indispensable, du point de vue de Dedekind, de proposer une définition « exacte et qui soit commune à tous les nombres idéaux qu'il s'agit d'introduire dans un domaine numérique déterminé » [Dedekind 1876, Introduction, 283] — une définition générale, en somme. Dedekind propose alors de plutôt considérer « l'ensemble \mathfrak{a} de tous les nombres α du domaine [des entiers du corps] qui sont divisibles par un nombre idéal déterminé » [Dedekind 1876, Introduction, 285]. Un tel ensemble \mathfrak{a} est alors appelé un *idéal* et est défini par deux conditions nécessaires et suffisantes :

- I. Les sommes et les différences de deux nombres quelconques du système \mathfrak{a} sont toujours des nombres du même système \mathfrak{a} .
- II. Tout produit d'un nombre du système \mathfrak{a} par un nombre du système [des entiers du corps] est un nombre du système \mathfrak{a} . [Dedekind 1876, Introduction, 286]

Ainsi, cette définition, unique pour tous les idéaux, permet-elle de mener à bien la démonstration des « lois fondamentales qui s'appliquent également à tous les corps finis¹⁵ sans exception, et qui régissent et expliquent les phénomènes de la divisibilité » [Dedekind 1876, Section IV, 207] pour les entiers d'un tel corps. Pour démontrer la validité des lois de divisibilité dans le domaine des entiers d'un corps de nombres algébriques, Dedekind définit une relation de divisibilité pour les idéaux : pour deux idéaux \mathfrak{a} et \mathfrak{b} , \mathfrak{a} divise \mathfrak{b} signifie que \mathfrak{a} contient \mathfrak{b} ($\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$). Après avoir exhibé l'équivalence entre divisibilité des idéaux et divisibilité des entiers, il démontre alors la validité des lois pour les idéaux. En vertu de l'équivalence mentionnée, cela revient à avoir prouvé la validité générale des lois pour les entiers du corps étudié.

La démonstration est faite en utilisant exclusivement les relations arithmétiques définies. De cette manière, les méthodes utilisées sont essentiellement une généralisation de la notion de divisibilité, et évitent de faire appel à la nature individuelle des éléments du corps ou de s'appuyer sur des éléments trop lourds de contingence comme le choix d'une variable ou une notation particulière. Ainsi,

[p]ar la théorie générale des idéaux (...) les phénomènes de la divisibilité des nombres pour tout domaine [d'entiers d'un corps de nombres algébriques] (...) ont été ramenés aux mêmes lois fixes qui règnent dans l'ancienne théorie des nombres rationnels. [Dedekind 1876, § 27, 231]

15. Un « corps fini », pour Dedekind, est un corps finiment généré.

La « certitude que ces lois générales existent réellement » [Dedekind 1876, § 27, 231] a été acquise « avec une entière rigueur » [Dedekind 1876, Introduction, 288]. La preuve, valable pour *n'importe quel* corps de nombres algébriques, en a été donnée sur la base seule des nombres algébriques et de la notion d'idéal, notion ensembliste se réduisant à « collecter » des nombres existants. De plus, on voit bien de quelle manière il apparaît crucial pour Dedekind que la démonstration soit non seulement valable dans n'importe quel corps de nombres algébriques, mais également développée sur la base de concepts généraux au sein de théorie étudiée.

Deux questions s'imposent, afin de comprendre réellement le lien tissé entre généralité et rigueur : (1) quelle conception de la rigueur sous-tend la démarche de Dedekind ? Et (2) quelle généralité recherche Dedekind et comment peut-on effectivement l'atteindre ?

3 Vers une élucidation de la conception dedekindienne de la rigueur

3.1 « Dedekind's principle » et définition

L'essai de Dedekind sur les entiers naturels, dont le titre pose la question de la nature (*Was sind*, que sont) et du rôle (*was sollen*, à quoi servent) des nombres, s'ouvre sur une affirmation dont le lien avec une construction des entiers naturels n'est *a priori* pas évident :

En science ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. [Dedekind 1888, 133]

Michael Detlefsen, dans son article « Dedekind Against Intuition. Rigor, Scope and the Motives of His Logicism » [Detlefsen 2011], propose une interprétation de cette idée qu'il appelle « Dedekind's principle », dans laquelle il suggère que ce principe peut être compris comme guidant ce qu'il est acceptable de *croire*, quelle justification doit être considérée comme acceptable pour une proposition scientifique. Selon lui, Dedekind embrasse la vue selon laquelle

The only proper, and the best possible scientific justification of a provable proposition is a proof. More accurately, it is a proof in which all the basic premises are unprovable. [Detlefsen 2011, 210]

Ainsi, explique Detlefsen, le « principe de Dedekind » nous fournit un standard de rigueur pour les mathématiques selon lequel une preuve n'est rigoureuse, et donc acceptable, que si elle repose sur des prémisses dont il est reconnu qu'elles sont improuvables. C'est ce principe qui soutient l'entreprise de *Zahlen* et qui, du point de vue de Detlefsen, guiderait un certain logicisme dedekindien. Ici, l'argument de Detlefsen s'articule avec l'idée, communément

admise au XIX^e siècle, que les « lois de la pensée » sur lesquelles repose l'édifice construit par Dedekind dans *Zahlen*, seraient les seules vérités non-prouvables (voir [Detlefsen 2011, 208–210]). Suivant le « principe de Dedekind », l'indémontrabilité des lois de la pensée en fait de parfaites candidates pour servir d'ultimes prémisses et répondre à la demande de rigueur.

This being so, [the laws of thought] provided a similarly objective terminus for the pursuit of rigor. According to Dedekind's Principle, a genuinely rigorous or scientific mathematics required that proof be pursued to the fullest extent logically possible — that is, to the point where every proposition susceptible of proof had been proved. [Detlefsen 2011, 211]

On comprend alors de quelle manière l'essai de Dedekind sur les nombres naturels répond au critère de rigueur exigeant de ne rien accepter sans preuve : la construction de la suite des entiers naturels, et l'arithmétique qui en découle, y sont, en effet, basées sur les lois de la pensée, garantissant que l'on s'appuie sur des prémisses indémontrables. C'est en vertu du principe de rigueur selon lequel il ne faut rien laisser indémontré qui soit susceptible de démonstration, que l'on *définit* la suite des entiers naturels avec des concepts généraux représentant les opérations de la pensée.

Du point de vue de Detlefsen, le standard de rigueur attaché au « principe de Dedekind », lié à l'indémontrabilité des pures lois de la pensée et à un « engagement envers un standard objectif pour déterminer lorsqu'une preuve a été menée jusqu'aux dites prémisses improuvables » [Detlefsen 2011, 211], constituent le « logicisme » de Dedekind. Ici, le « logicisme » est moins un engagement fort sur la nature des objets et vérités mathématiques, qu'une manière de normer ce qui est acceptable comme raisonnement scientifique et en particulier mathématique. De tels préceptes justifient pleinement le refus de l'utilisation de l'intuition dont Dedekind se fait l'écho et qu'il appuie, notamment, sur la possibilité de réduire des « vérités à d'autres plus simples, si longue encore et artificielle en apparence que puisse être la suite des inférences » [Dedekind 1888, 137], mais semblent omettre certains aspects essentiels de ses travaux.

Soulignons, en effet, une difficulté qui apparaît si l'on tente de regarder *Zahlen* comme essentiellement une application du « principe de Dedekind ». L'essai de Dedekind a pour but de *définir* la suite des entiers naturels, il est une réponse à la double question posée en titre de l'ouvrage. Ne devrait-on alors pas questionner le principe de Dedekind et son insertion dans le livre ? Dedekind *prouve-t-il* ou *définit-il* ? Faire de ce principe la première phrase de l'essai n'est pas anodin. On peut, semble-t-il, exclure deux possibilités. D'une part, on peut écarter une interprétation logiciste fondée seulement sur le rejet de l'intuition en arithmétique. Si Dedekind refuse ouvertement tout recours à l'intuition¹⁶,

16. « En considérant l'Arithmétique (l'Algèbre, l'Analyse) comme une simple partie de la logique, j'exprime déjà que je tiens le concept de nombre pour totalement indépendant des représentations ou intuitions de l'espace et du temps et que j'y vois plutôt une émanation directe des pures lois de la pensée » [Dedekind 1888, 133–134].

il ne présente aucun projet fondationnaliste ou réductionniste tenant d'un logicisme à proprement parler¹⁷. La logique, comme on peut le distinguer dans les principes posés par Detlefsen comme base au « logicisme », se présente chez Dedekind essentiellement comme instrument pour guider les raisonnements. D'autre part, on peut également exclure la possibilité que le principe renvoie à quelques démonstrations essentielles du livre (la preuve de la validité du raisonnement par récurrence, par exemple), car alors sa cible manquerait le cœur même du livre : la *définition* de la suite des entiers et des premiers éléments de l'arithmétique (nombres cardinaux, addition, multiplication, etc.). Reste alors à considérer la possibilité d'un jeu entre *démontrer* et *définir*.

Le principe de rigueur pourrait alors s'énoncer comme une exigence de définition, possibilité d'interprétation étayée notamment par une lettre à Lipschitz du 27 juillet 1876. Dedekind y argumente en faveur de sa définition des nombres réels, dont Lipschitz affirme qu'elle ne dit rien qui ne soit déjà chez Euclide¹⁸. Dedekind, analysant la théorie des proportions d'Euclide pour en souligner la différence avec ses propres travaux sur les irrationnels, explique que si l'on souhaite, comme c'est son cas, « édifier l'Arithmétique sur le concept du rapport de grandeur (ce qui n'était pas l'intention d'*Euclide*) » [Benis Sinaceur 2008, 280], alors l'évidence de l'existence des grandeurs qui suffisait à Euclide est « absolument insuffisante » :

En effet, dans cette manière de fonder l'Arithmétique, la complétude du concept de nombre dépend uniquement de la complétude du concept de grandeur ; mais comme la complétude continue des nombres réels est indispensable pour édifier scientifiquement l'Arithmétique, il est essentiel de *savoir* d'entrée de jeu avec exactitude le degré de complétude des grandeurs *car rien n'est plus dangereux en mathématiques que d'admettre sans preuve suffisante des existences*. [Benis Sinaceur 2008, 280, je souligne la fin du paragraphe]

Il s'agit alors « d'hypothèses d'existence illicites » [Benis Sinaceur 2008, 280]. C'est ici qu'intervient vraisemblablement le « principe de Dedekind » : on vérifie (ou démontre) l'hypothèse d'existence en définissant effectivement la notion dont on suppose l'existence par réduction systématique à des concepts antérieurs. Et c'est exactement ce qui est fait dans *Zahlen*. Dedekind le mentionne lui-même, les nombres naturels sont un concept que l'on a tendance à ne pas définir rigoureusement, car ils sont souvent considérés (à tort) comme « quelque chose de simple, évident, donné à l'intuition interne » [Dedekind 1888, 137].

H. Benis Sinaceur, dans la note introductive à sa traduction de *Zahlen*, souligne également la quasi-équivalence entre démontrer et définir dans la

17. Sur le logicisme de Dedekind, on pourra consulter [Benis Sinaceur s. d.].

18. Lipschitz fait référence à la théorie eudoxienne des proportions dans le livre V des *Éléments*, voir [Benis Sinaceur 2008, 256–258].

phrase d'ouverture de *Zahlen*, ajoutant que sans une véritable définition, « les démonstrations pourraient être lacunaires, voire circulaires ou impossibles » [Benis Sinaceur 2008, 96]. Pour prévenir les démonstrations fautives, il faut alors ne rien admettre qui soit définissable sans le définir effectivement.

La rigueur chez Dedekind s'articule autour de cette idée que tout ce qui peut être réduit à des vérités « plus simples » doit l'être effectivement, même si pour y parvenir une suite d'inférences longue et « artificielle en apparence » [Dedekind 1888, 137] est nécessaire, car il est ensuite possible de fixer la définition pour permettre un développement plus sûr et plus aisé des mathématiques. Par cette réduction, on s'assure de la cohérence du concept que l'on définit, on sécurise les inférences de sa définition et on les maîtrise toutes parfaitement : chaque étape est convenablement justifiée, et chaque étape est clairement comprise. On s'assure ainsi une définition qui permette des démonstrations complètes : rien n'est admis sans démonstration.

Cette démarche, à nouveau, n'est pas limitée à la définition des entiers naturels, mais il faut y apporter une nuance et en préciser l'enjeu. Il n'est pas nécessaire, et d'ailleurs il n'est sans doute pas toujours fécond, de systématiquement remonter jusqu'à ces « ultimes prémisses ». Le travail de Dedekind sur le fondement des nombres n'est pas une recherche fondationnelle pour la beauté du geste, elle vise à établir une base rigoureuse et générale utile aux développements futurs des mathématiques. Il convient, par conséquent, de contextualiser le « principe de Dedekind » présenté par Detlefsen. Si, lorsque l'on définit les nombres naturels, il est requis de baser la définition sur des prémisses improuvables et générales, c'est parce que l'on donne un fondement au premier objet de la plus simple des sciences. Dans les développements ultérieurs des mathématiques, et notamment lors de l'extension du concept de nombre, il convient de tirer avantage des fondations déjà posées et de « réduire les longues suites d'inférences » [Dedekind 1888, 138] en basant sur les concepts (antérieurs) déjà bien définis — le but avoué des travaux de définition de Dedekind étant, en effet, de poser des bases solides pour simplifier le travail du mathématicien. Ainsi, qu'il s'agisse des extensions des systèmes de nombres ou de définir/ démontrer dans des travaux de mathématiques plus avancées, la réduction à des concepts antérieurs ne doit pas se comprendre comme un réductionnisme, mais comme la proposition que ce qui est bien défini dans les aires conceptuelles antérieures peut être utilisé comme outil pour des développements futurs — c'est le principe essentiel de la stratégie d'arithmétisation proposée par Dedekind.

3.2 Treppen-Verstand

La définition des entiers naturels proposée par Dedekind est, de son propre aveu, abstraite au point de paraître transformer les nombres, « amis fidèles et familiers », en « formes fantomatiques » [Dedekind 1888, 136]. *Zahlen* décompose le raisonnement à la source même de la création des entiers naturels et

procède d'une « longue suite d'inférences simples » qui, si elle peut sembler laborieuse et inutile, correspond selon Dedekind à la manière de fonctionner de notre esprit : la « facture progressive de notre entendement » [Dedekind 1888, 136], « *Treppen-Verstand* » littéralement, « compréhension en escalier »). Dedekind reprend le terme « *Treppen-Verstand* » dans une lettre à Cantor du 29 août 1899 [Dugac 1976, 261] discutant les recherches de Cantor en théorie des ensembles. L'image choisie par Dedekind d'une compréhension « en escalier » reflète exactement le précepte mentionné dans la partie précédente. La rigueur vient alors assurer le raisonnement du mathématicien — rigueur indispensable, pour Dedekind, à une bonne compréhension comme le montrent ses propos sur les travaux de Riemann.

Mais comment, en pratique, met-on en œuvre un tel principe en dehors des fondements des mathématiques (aire finalement restreinte et qui n'est mathématiquement pas la plus féconde) ? L'article sur les fonctions algébriques de 1882 semble indiquer une solution possible, d'ailleurs largement exploitée par Dedekind. Il semblerait en effet que pour Dedekind mettre en évidence une construction reposant sur les concepts algébriques de corps et d'idéal et sur les opérations rationnelles de l'arithmétique pour poser des bases rigoureuses et construire un arsenal au service de théories mathématiques plus avancées, soit à même de satisfaire cette demande.

Née dans les cours sur la théorie de Galois que Dedekind donne entre 1856 et 1858¹⁹ et pleinement exploitée à partir de la théorie des entiers algébriques publiée en 1871, la méthodologie que développe Dedekind articule l'utilisation de systèmes (infinis) d'éléments répondant à des conditions de clôture par les opérations rationnelles, et la définition d'opérations arithmétiques (en particulier la multiplication et la division) entre ces systèmes²⁰. Par sa manière de procéder — l'utilisation exclusive de notions arithmétiques — et par ses motivations — donner un fondement logiquement rigoureux — l'approche de Dedekind est typiquement une démarche d'arithmétisation, bien qu'elle soit d'une envergure qui dépasse le cadre généralement attribué à l'arithmétisation.

Cette approche permet de concilier les exigences énoncées par Dedekind. On notera tout d'abord, qu'à ses yeux, l'arithmétique possède une rigueur propre, notamment reconnaissable en ce que l'intuition n'y entre pas en jeu. Cet élément essentiel est palpable dans les travaux fondationnels de Dedekind. L'arithmétique, basée sur des concepts clairement définis, procède par inférences (simples) ne recourant qu'à la logique. D'autre part, elle permet également de mener à bien la réduction à des concepts antérieurs sans pour autant remonter systématiquement aux opérations de la pensée — ce qui serait plus laborieux qu'efficace, la bonne définition des nombres et des opérations autorisant à ne pas y revenir. Enfin, avantage non négligeable, l'utilisation de

19. Le cours a été publié en 1981 par Scharlau dans [Scharlau 1981].

20. Voir la définition de la division entre idéaux donnée en § 1.3. Cette approche est adoptée pour les groupes, les corps, et les modules également et choisie car elle rend le maniement des concepts plus *aisé*.

l'arithmétique concilie les exigences de rigueur avec la liberté d'introduction de nouveaux concepts revendiquée par Dedekind²¹. En effet, l'arithmétique se laisse développer en théorie abstraite, dans la mesure où l'on peut définir des opérations arithmétiques pour des objets qui ne sont pas des nombres, et offre ainsi la possibilité d'introduire de nouveaux concepts, comme les corps ou les idéaux. Ces nouveaux concepts ouvrent de nouveaux champs d'étude en mathématiques et sont également extrêmement féconds comme outils dans d'autres aires des mathématiques — pour la théorie des formes binaires quadratiques ou celle des fonctions algébriques, par exemple.

La démarche d'arithmétisation est également présente, comme on le sait, dans la définition des nombres réels. Dans *Stetigkeit*, Dedekind affirme, déplorant le manque d'un fondement scientifique pour l'analyse infinitésimale et la continuité :

Il restait seulement alors à en découvrir l'origine propre dans les éléments de l'Arithmétique et à obtenir *ainsi* une véritable définition de l'essence de la continuité. [Dedekind 1872, 60, je souligne]

Dans l'introduction à *Zahlen*, Dedekind mentionne également que c'est en fondant les définitions sur l'arithmétique, que l'on peut apporter une véritable clarté aux élargissements successifs du concept de nombre [Dedekind 1888, 138]. De plus, utiliser exclusivement des notions arithmétiques pour étendre l'arithmétique permet de s'assurer qu'aucun élément étranger n'intervienne dans le raisonnement, puisque l'on procède à l'extension des domaines de nombres

en les ramenant toujours à des concepts antérieurs, et sans interférence de représentations de nature étrangère. [Dedekind 1888, 138]

De manière significative, ce type d'argument réapparaît dans la théorie des fonctions algébriques :

Ainsi, une partie bien délimitée et relativement étendue de la théorie des fonctions algébriques est traitée uniquement par des moyens appartenant à sa propre sphère. [Dedekind & Weber 1882, 240]

La nouvelle théorie est ainsi développée grâce à l'élaboration d'outils conçus au moyen d'éléments conceptuellement antérieurs et bien connus. On s'assure, ainsi, une théorie plus claire, plus précise, dont on maîtrise chacune des étapes, chacune des inférences, et dont les concepts sont définis sur la base de concepts antérieurs déjà bien définis. On s'assure, en somme, une théorie rigoureuse.

21. « [L]es progrès les plus grands et les plus féconds en mathématiques (...) sont dus avant tout à la création et à l'introduction de nouveaux concepts... » [Dedekind 1888, 139].

Pour arriver à une théorie rigoureuse, l'arme de choix de Dedekind s'avère être une combinaison de notions ensemblistes et d'arithmétique rationnelle. La théorie des idéaux, encore une fois, en est un excellent exemple : le *nouveau* concept d'idéal est un ensemble d'éléments (existants) vérifiant une propriété de clôture par les opérations rationnelles, et dont la théorie est développée en s'appuyant de manière essentielle sur la définition d'une relation de divisibilité entre idéaux. Cette théorie donne la possibilité de mettre en place un arsenal algébrique-arithmétique mettant en jeu des notions relativement simples, comme la divisibilité, et grâce auxquelles il est possible, par exemple, de donner à la surface de Riemann une nouvelle définition plus rigoureuse, plus générale et reposant largement sur les opérations de l'arithmétique. La définition arithmétique paraît ainsi donner, pour Dedekind, la garantie de respecter le critère essentiel de rigueur : tout ce qui peut être défini ou démontré est effectivement défini ou démontré par réduction à des concepts antérieurs grâce aux outils de l'arithmétique. L'arithmétisation comme outil de rigueur semble d'une évidence qui s'approche du truisme. Il est important, donc, de souligner que dans la démarche de Dedekind, arithmétiser ne vient pas seulement répondre à une demande de rigueur, cela vient également servir une exigence de généralité.

Il s'agit en effet d'un autre élément essentiel qui sous-tend la mise en œuvre de mathématiques rigoureuses chez Dedekind : la définition, de même que la preuve, doit être basée sur des concepts *généraux* permettant de définir (et démontrer) d'un même geste tous les éléments concernés. C'est pour cela que les outils logiques des opérations de la pensée sont adéquats pour définir les entiers naturels : on ne peut pas trouver de concepts antérieurs aux nombres entiers qui soient plus simples, et on ne peut pas en trouver de plus généraux.

4 Généralité(s) et pratique de la rigueur

Les travaux de Dedekind ont vu le jour dans une volonté soit de démontrer un résultat de manière parfaitement générale (la théorie des entiers algébriques), soit de (re)définir les concepts fondamentaux d'une théorie avec une complète généralité (la théorie des fonctions algébriques, les travaux fondationnels). Dans chaque cas, c'est en passant par l'arithmétique que Dedekind atteint son but²². Il faut souligner qu'arithmétique n'est pas synonyme de propriétés des entiers naturels : tout comme le concept de nombre est étendu successivement — le plus souvent pour répondre aux besoins du développement des mathématiques —, l'arithmétique prend, au fur et à mesure de son développement, une envergure plus grande. Avec la possibilité de définir des opérations arithmétiques entre concepts algébriques, elle atteint un stade d'abstraction qui en fait un outil d'une très grande généralité.

22. *Zahlen* étant une exception notable puisque l'arithmétique *n'est pas encore définie* lorsqu'on définit les entiers naturels.

L'approche algébrico-arithmétique de Dedekind, non contente de servir le « principe de Dedekind », semble permettre également de s'assurer un traitement général — c'est-à-dire sans exception. En théorie des fonctions algébriques, Dedekind et Weber expriment leur insatisfaction face aux travaux des héritiers de Riemann en soulignant leur manque de généralité (et de rigueur) :

Dans les travaux effectués sur ce sujet jusqu'ici, en règle générale, des hypothèses restrictives sur les singularités des fonctions considérées ont été faites, et les soi-disant exceptions sont alors soit mentionnées en passant comme cas limites, soit laissées complètement de côté. De même, certains théorèmes fondamentaux sur la continuité ou la développabilité sont admis sans les mentionner, leur évidence reposant sur une intuition géométrique d'une sorte ou d'une autre. [Dedekind & Weber 1882, 238]

Les hypothèses tacites sur la continuité ou la développabilité sont évitées chez Dedekind et Weber, car ces considérations doivent être une conséquence de la définition et n'entrent pas en jeu dans l'article. C'est par l'étude arithmétique des corps de fonctions algébriques qu'ils parviennent à une nouvelle (et satisfaisante, de leur point de vue) définition de la surface de Riemann — définition tout aussi arithmétique, puisqu'elle n'est pas seulement étroitement liée à la divisibilité dans le corps de fonctions étudié, sa construction repose également en grande partie sur des opérations arithmétiques.

4.1 Une généralité à plusieurs visages ?

Si le réquisit de généralité est exprimé clairement par Dedekind, la caractérisation de la généralité, elle, est beaucoup moins claire.

4.1.1 Généralité des opérations de la pensée

Le « principe de Dedekind » mentionné au paragraphe précédent, appliqué à la définition des entiers naturels, amène à fonder leur définition sur les lois de la pensée, ce qui en pratique revient à utiliser comme base de la définition les deux notions mathématiques formalisant les opérations fondamentales de la pensée : les ensembles et les représentations. Si cette fondation est acceptable, c'est d'une part parce que les lois de la pensée sont des prémisses indémontrables comme le souligne Detlefsen ; d'autre part parce qu'elles sont l'élément primitif auquel nous mène l'analyse conceptuelle de la suite des nombres comme le montrent les lettres de Dedekind à Keferstein, mais également parce qu'elles possèdent une parfaite généralité. En tant que logiques, les opérations de la pensée traduites en concepts ensemblistes ont le plus haut degré de généralité, car elles s'appliquent objectivement à toute pensée — et même, elles sont essentielles à la pensée. Les opérations de la pensée ont une généralité universelle, et sont alors, pour Dedekind, plus générales que le nombre. C'est

ce qui les place au fondement même des mathématiques et comme seul candidat viable pour définir (rigoureusement) la suite des nombres, l'objet de « la plus simple des Sciences ». Les ensembles et les représentations sont les outils mathématiques formalisant les opérations de la pensée. Aussi sont-ils les outils les plus généraux à la disposition du mathématicien, et donc en pratique, les plus appropriés pour fonder la science des nombres.

Cette définition fondée sur les opérations de la pensée est la première source de généralité des nombres. Élaborée exclusivement à partir de concepts généraux, la définition donnée par Dedekind (dont il suffira de dire qu'elle est équivalente aux axiomes de Peano, par souci de brièveté) est la définition de *tous* les systèmes vérifiant les axiomes (les systèmes simplement infinis) et la suite des nombres naturels elle-même est le type abstrait des systèmes simplement infinis²³.

4.1.2 Généralité de l'arithmétique

Science d'un objet défini de manière parfaitement générale, l'arithmétique acquiert ainsi une généralité équivalente. L'arithmétique est en effet définie de la manière suivante :

[L]es relations ou lois qui sont dérivées des seules conditions [définissant les systèmes simplement infinis] et qui, pour cette raison demeurent toujours identiques dans tous les systèmes ordonnés simplement infinis, forment, quels que puissent être les noms donnés aux éléments singuliers, le premier objet de la *science des nombres* ou *Arithmétique*. [Dedekind 1888, 180]

De manière plus significative encore, Dedekind parvient à démontrer ce que l'on appelle aujourd'hui la catégoricité de l'arithmétique. Ce théorème est vu par Dedekind comme la preuve que les propositions de l'arithmétique sont « valide[s] de manière tout à fait générale » [Dedekind 1888, 201] pour *tous* les systèmes simplement infinis puisque ceux-ci sont isomorphes²⁴. Ainsi, du point de vue de Dedekind, il est *rigoureusement prouvé* que l'arithmétique élémentaire est générale. Dedekind évoque même, dans la suite de la remarque qui vient d'être citée, la possibilité de transférer (*übertragen*) les propositions et théorèmes d'un système à l'autre.

Rappelons de plus, que les opérations de l'arithmétique rationnelle (addition, multiplication et leurs opérations inverses) sont définies, elles aussi, en termes d'ensembles et de représentations dans *Zahlen*. La définition des opérations est alors aussi générale que les développements précédents dans le livre, ce qui vient soutenir la généralité de la science des nombres (qui n'est pas réellement effective sans ses opérations). La possibilité de « transférer » les opérations arithmétiques à d'autres domaines est alors ouverte. Et en effet,

23. Voir *Zahlen*, 179-180, et la correspondance avec Keferstein.

24. Voir la citation donnée en § 2.2., page 137.

dans ses travaux algébriques, Dedekind exploite pleinement la généralité de l'arithmétique et la possibilité de « transfert », en définissant, comme je l'ai déjà évoqué, des opérations arithmétiques pour des objets qui ne sont pas des nombres — et en particulier pour ses concepts algébriques.

La généralité de l'arithmétique est prégnante dans les travaux mathématiques les plus élaborés de Dedekind. Elle permet une application, un transfert, des opérations dans des domaines nouveaux ou que l'on n'aurait pas, *a priori*, considérés comme arithmétisables. Ainsi, Dedekind montre-t-il, dans sa théorie des nombres algébriques, qu'il est possible de définir et d'utiliser (efficacement) les opérations et lois de l'arithmétique rationnelle pour les idéaux de nombres. L'article avec Weber pousse la possibilité de définir des opérations arithmétiques plus loin encore, puisque les méthodes de la théorie des nombres algébriques y sont transférées à la théorie des fonctions algébriques dans laquelle les opérations rationnelles sont utilisées jusque dans la mise en place des éléments nécessaires à la définition de la surface de Riemann.

La généralité de l'arithmétique est alors une généralité horizontale, transférable et valide dans différents cadres, permettant d'en faire un outil puissant répondant conjointement aux exigences de généralité et de rigueur exprimées par Dedekind : bien fondée et générale, l'arithmétique assure une parfaite rigueur.

4.1.3 Généralité comme uniformité

Demander que la définition donnée soit unique pour tous les éléments concernés mène à remodeler les définitions selon le cadre dans lequel on se place. Ainsi, dans le cas de la notion d'entier en théorie des nombres algébriques :

La plus haute généralisation de la notion de nombre entier consiste dans ce qui suit. Un nombre θ est dit un nombre algébrique lorsqu'il satisfait à une équation

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \dots + a_{n-1}\theta + a_n = 0$$

de degré fini n et à coefficients rationnels a_1, a_2, \dots, a_n ; il est dit un *nombre entier algébrique*, ou plus brièvement un nombre entier, lorsqu'il satisfait une équation de la forme ci-dessus dans laquelle les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n sont tous des nombres entiers rationnels. [Dedekind 1876, Introduction, 278–279]

Ici, le nombre entier algébrique est la plus haute généralisation, le concept de nombre entier « le plus général » car tout entier (entiers naturels, rationnels, de Gauss...) est un entier algébrique : la définition est donc valable pour tous les nombres entiers. Dans *Zahlen*, en revanche, ce que Dedekind propose est la définition « la plus générale » du concept de *nombre naturel*.

Pour qu'une définition soit générale, elle doit définir d'un seul geste tous les éléments qui tombent sous le concept. Il ne doit y avoir aucune exception

demandant un traitement spécial, pas de stratégie impliquant la distinction de plusieurs cas, et elle doit éviter toute contingence (telle que s'appuyer sur la notation) et de prendre comme élément essentiel quelque chose d'arbitraire (comme c'est le cas lorsque l'on doit choisir une variable). Un élément crucial, et sur lequel je reviendrai, est que si l'on est capable de donner une telle définition, alors on pourra déduire des démonstrations aussi générales. Une définition répondant à ces exigences doit permettre de donner des preuves suivant les mêmes principes.

C'est cette généralité que Dedekind et Weber recherchent en théorie des fonctions algébriques : la possibilité de traiter des fonctions algébriques sans avoir à poser *a priori* des restrictions sur les singularités des fonctions ou des hypothèses sur leur comportement individuel. Mieux encore, une telle définition permet de développer toute la théorie sans exceptions. La généralité, ici, est relative au cadre de travail, ce n'est plus une universalité mais la possibilité d'un traitement uniforme de la théorie.

La recherche de généralité en tant que partie intégrante de la pratique de mathématiques rigoureuses chez Dedekind apparaît comme extrêmement dépendante du contexte dans lequel on travaille, dans le sens où Dedekind cherche à donner les définitions et preuves les plus générales possibles *au sein de la théorie dans laquelle il travaille*. Ainsi, par exemple, la théorie des idéaux développée dans la théorie des entiers algébriques est appelée « théorie générale des idéaux » parce qu'elle est la théorie des idéaux de *n'importe quel corps de nombres*. La dépendance au cadre de travail est un élément très important qui souligne que la généralité n'est pas une notion purement philosophique, mais à articuler avec la pratique.

De plus, il n'est pas utile, ni même conseillé, de rechercher systématiquement la plus grande généralité. Au contraire, il faut être attentif à la mania-bilité et la fécondité effective et immédiate de la définition que l'on propose... ainsi qu'à sa rigueur :

Bien sûr, tous ces résultats peuvent être obtenus de la théorie de Riemann avec un investissement de moyens bien plus limité et comme cas particuliers d'une présentation générale beaucoup plus étendue ; mais il est alors bien connu que fonder cette théorie sur une base rigoureuse offre encore certaines difficultés, et tant qu'il n'aura pas été possible de surmonter complètement ces difficultés, il se pourrait que l'approche que nous avons adoptée, ou au moins une qui y soit apparentée, soit la seule qui puisse conduire réellement avec une rigueur et une généralité suffisantes à ce but pour la théorie des fonctions algébriques. [Dedekind & Weber 1882, 240]

4.2 La généralité, une condition pour un développement rigoureux ?

Le lien tissé entre généralité et rigueur apparaît donc très étroit. La généralité des définitions pourrait-elle ne pas seulement accompagner la rigueur, mais en être une condition ?

La généralité d'une définition, comme celle d'une théorie, dépend largement des outils utilisés pour la mettre en place. Rappelons que si l'on base une définition sur des concepts antérieurs plus généraux, on prévient le risque d'introduire des notions « étrangères » dans la théorie. On évite également les raisonnements circulaires, les démonstrations lacunaires, les hypothèses d'existence illicites. On s'assure enfin la possibilité de donner une définition *générale* : une définition unique pour tous les cas concernés. Il s'agit alors d'élaborer des concepts généraux, taillés sur mesure, pour assurer le bon fondement de la théorie que l'on souhaite étudier. Pour les entiers naturels, ce sont les ensembles et représentations et pour les nombres irrationnels, la notion de coupure. Pour la théorie des entiers algébriques et pour celle des fonctions algébriques, ce sont les concepts algébriques (corps, module, idéal) qui serviront cette fin.

Dans la théorie des nombres algébriques, évoquée en première partie de cet article, Dedekind se donne pour but de donner une « théorie générale échappant à toute exception » [Dedekind 1876, Introduction, 278] et y parvient en *fondant* la théorie sur la notion d'idéal. En référence à la définition des idéaux par les deux conditions nécessaires et suffisantes de clôture, Dedekind écrit :

[La] constatation [que les propriétés sont des conditions nécessaires et suffisantes] m'a conduit naturellement à fonder toute la théorie des nombres du domaine [des entiers du corps] sur cette définition simple, entièrement délivrée de toute obscurité et de l'admission des nombres idéaux. [Dedekind 1876, Introduction, 287]

L'insistance sur la généralité des définitions et des concepts utilisés comme bases porte en creux l'idée que si l'on parvient à donner la « bonne » définition, les démonstrations sûres et complètes suivront par une suite simple d'inférences logiques élémentaires. Ainsi, souvent chez Dedekind, les théorèmes « résultent immédiatement » [Dedekind 1854] dans [Benis Sinaeur 2008, 227], les lois sont « dérivées des seules conditions » [Dedekind 1888, 180] de la définition. Les démonstrations « découlent immédiatement des définitions » [Dedekind 1872, 81].

La théorie des entiers algébriques illustre particulièrement bien cette idée qu'en basant la théorie sur la « bonne » définition, générale et soigneusement choisie²⁵ et en identifiant les méthodes les plus appropriées pour développer

25. Dans la théorie des nombres algébriques, identifier quels sont les nombres qui doivent être considérés comme les entiers est particulièrement crucial pour le succès de la généralisation des résultats de Kummer. Voir [Edwards 1980, §5].

la théorie, les propositions et théorèmes et leurs démonstrations suivent facilement. Avoir identifié la bonne notion d'entier pour les nombres algébriques permet de développer la théorie des idéaux dans les corps de nombres algébriques, théorie qui donne à Dedekind la possibilité de prouver la validité générale des lois de divisibilité en suivant un développement analogue à la théorie des nombres rationnels en utilisant seulement les opérations rationnelles. C'est également le cas de la théorie des fonctions algébriques qui est développée en analogie avec les corps de nombres algébriques et repose largement sur les opérations de l'arithmétique rationnelle.

On voit bien ici quel avantage Dedekind a pu voir dans l'utilisation des idéaux : plutôt que s'engager dans des développements et calculs laborieux, il peut déployer une théorie extrêmement élaborée et féconde mettant en œuvre essentiellement les « principes les plus simples de l'arithmétique », dont on est assuré de la généralité et de la définition rigoureuse²⁶.

Ainsi, l'exigence de généralité pour les définitions est par extension une garantie de généralité et de rigueur pour les démonstrations. Cela permet, notamment, de donner des preuves rigoureuses qui manquaient encore. Un exemple bien connu que prend souvent Dedekind pour souligner l'efficacité de sa définition des irrationnels, est qu'elle lui permet de fournir la première (d'après lui) démonstration rigoureuse d'affirmations telles que $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$ ²⁷. On peut souligner également que, dans *Algebraische Funktionen*, Dedekind et Weber donnent la première véritable preuve du théorème de Riemann-Roch [Dedekind & Weber 1882, §§ 28–29]²⁸. Mais les conséquences positives vont plus loin encore que la seule possibilité de mener à bien les démonstrations au sein de la théorie étudiée, on donne également la possibilité d'assurer le développement futur des mathématiques. Une définition correcte des irrationnels est essentielle, car

il s'agit de fournir une caractéristique précise de la continuité, utilisable comme base de véritables déductions. [Dedekind 1872, 72]

26. *Zahlen* n'est publié qu'en 1888, mais Dedekind explique dans la première préface à *Zahlen* qu'une première ébauche essentiellement similaire à celle publiée a été rédigée entre 1872 et 1878, dont on pourra trouver des extraits dans [Sieg & Schlimm 2005]. Cela correspond au moment où la version de 1876-1877 de la théorie des idéaux a été écrite et publiée, version qui fait un usage beaucoup plus développé des opérations arithmétiques que la version de 1871, et est transférée à la théorie des fonctions.

27. Voir la lettre à Lipschitz du 10 juin 1876 [Benis Sinaceur 2008, 262–270] et la lettre à Weber du 19 novembre 1878 [Benis Sinaceur 2008, 288–290].

28. Dans [Tappenden 1995], Jamie Tappenden souligne que la nouvelle preuve du théorème de Riemann-Roch donnée par Dedekind et Weber permet une meilleure compréhension du théorème, car « différentes preuves peuvent offrir différents diagnostics sur la nature de la proposition prouvée » et une nouvelle preuve permet de délimiter une étendue appropriée pour les applications, ainsi que d'affirmer la « priorité relative des raisonnements géométriques et arithmétiques » [Tappenden 1995, 339–340].

Cette remarque est également faite également en théorie des fonctions algébriques, dans laquelle continuité et considérations topologiques n'entrent pas en jeu, mais pourront bénéficier des fondements établis dans l'article :

Dans notre travail, (...) un long détour est fait pour donner un fondement algébrique à la théorie des idéaux et ainsi obtenir une définition du « point d'une surface de Riemann » totalement précise et rigoureuse, laquelle pourra servir de base pour les recherches sur la continuité et toutes les questions qui y sont liées. [Dedekind & Weber 1882, 241]

De cette manière, on s'assure un développement général et rigoureux de la théorie entière grâce à une définition « totalement précise et rigoureuse » du point de la surface de Riemann puisque la théorie repose de manière essentielle sur la notion de surface de Riemann. Grâce à la bonne définition du point de la surface de Riemann, une base stable est garantie au mathématicien souhaitant approfondir la théorie et mener des investigations nécessitant la mise en place de notions topologiques — de la même manière que la bonne définition des nombres irrationnels apparaît essentielle pour l'Analyse.

Le point essentiel des recherches de Dedekind est donc d'assurer une base générale et rigoureuse pour soutenir et porter le développement des mathématiques. Prénant dans le cas des fonctions algébriques, cet aspect pragmatique est également présent dans les recherches fondationnelles de Dedekind qui souhaite « inciter d'autres mathématiciens à réduire les longues suites d'inférences à des proportions plus modestes et plus agréables » [Dedekind 1888, 138] ou donner la base de « véritables déductions » sur la continuité (cf. citation ci-dessus). La preuve de la validité générale des lois de divisibilité des entiers algébriques elle-même est surtout « d'un intérêt on ne peut plus pratique » [Dedekind 1876, §27, 231], car offrant la base de développements plus larges (arithmétique modulaire, division du cercle, formes quadratiques...) et d'après Dedekind :

la certitude que ces lois générales existent réellement facilite au plus haut degré la démonstration et la découverte des phénomènes spéciaux qui se présentent dans un corps déterminé. [Dedekind 1876, §27, 231]

4.3 Conclusion

La rigueur, que Klein assimile à une rigidité logique des démarches d'arithmétisation, se présente dans les mathématiques de Dedekind comme un élément structurant d'une pratique des mathématiques visant à établir les théories sur des bases solides et générales, dans l'optique de développements futurs. L'arithmétisation, dans l'œuvre de Dedekind, vient servir ces objectifs en permettant de mettre en place des arsenaux mathématiques construits à partir

de concepts antérieurs indémontrables ou déjà bien définis, ciselés pour atteindre ce but, et suffisamment puissants et généraux non seulement pour offrir un bon fondement à la théorie étudiée mais également pour stimuler et faciliter le développement de pans entiers des mathématiques — baser la théorie des nombres algébriques sur la notion d'idéal plutôt que sur celle de congruence supérieure, par exemple, est décisif. Le principe de rigueur s'éloigne ainsi d'un principe purement logique pour embrasser pleinement les exigences de la pratique mathématique. La rigueur rencontre alors une autre valeur épistémique tout aussi essentielle, la généralité, qui va infléchir la mise en œuvre de l'idéal de rigueur.

Rigueur et généralité s'articulent chez Dedekind de deux manières distinctes mais qui ne sont pas indépendantes. On les retrouve d'une part, dans une démarche de recherche de fondements pour les théories mathématiques : tout ce qui peut être prouvé ou défini doit effectivement être prouvé ou défini. C'est en basant les définitions sur des concepts antérieurs et généraux, que l'on s'assure de répondre à cette demande. D'autre part, rigueur et généralité s'allient sur ce que la définition doit pouvoir permettre d'accomplir, sur la motivation pratique d'une recherche systématique de fondements généraux et rigoureux : on souhaite que la définition soit générale afin qu'elle permette de mener chaque démonstration d'un seul geste, sans avoir à traiter de cas particulier ou s'appuyer sur des éléments contingents ou extérieurs, comme la notation.

Ainsi, tout ce qui est en amont de la définition doit être démontré, tout ce qui est en aval de la définition doit être (rendu) *démontrable*. La généralité est alors au service de la rigueur, justifiant des choix tactiques orientés pour favoriser le développement des mathématiques.

Bibliographie

- BENIS SINACEUR, Hourya [2008], *Richard Dedekind, la création des nombres*, Mathesis, Paris : Vrin.
- [s. d.], Is Dedekind logicist?, dans *Analytic Philosophy and the Foundations of Mathematics*, édité par P. Arana, A. & C. Alvarez, Basingstoke : Palgrave Macmillan, forth.
- DEDEKIND, Richard [1854], Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik, dans *Gesammelte Mathematische Werke*, édité par R. Fricke, E. Noether & O. Ore, Braunschweig : Vieweg, t. III, 428–438, trad. fr. [Benis Sinaceur 2008, 225–238].
- [1872], Stetigkeit und irrationale Zahlen, dans *Gesammelte Mathematische Werke*, édité par R. Fricke, E. Noether & O. Ore, Braunschweig : Vieweg, 315–334, reproduit dans [Dedekind 1930-1932, 315–334, vol. III], trad. fr. [Benis Sinaceur 2008, 57–90].

- [1876], Sur la théorie des nombres entiers algébriques, *Bulletin des Sciences Astronomiques et Mathématiques*, 11(1), 278–288, (1877), 17–41, 69–92, 144–164, 207–248, partiellement reproduit dans [Dedekind 1930-1932, 262–296, vol. III].
- [1888], Was sind und was sollen die Zahlen?, dans *Gesammelte Mathematische Werke*, édité par R. Fricke, E. Noether & O. Ore, Braunschweig : Vieweg, t. III, 335–391, trad. fr. [Benis Sinaceur 2008, 131–220].
- [1930-1932], *Gesammelte Mathematische Werke*, Braunschweig : Vieweg, édité par Fricke, R., Noether, E. et Ore, O.
- DEDEKIND, Richard & WEBER, Heinrich [1882], Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92, 181–290, reproduit dans [Dedekind 1930-1932, 238–350, vol. 1].
- DETLEFSEN, Michael [2011], Dedekind against intuition : Rigor, scope and the motives of his logicism, dans *Logic and Knowledge*, édité par C. Cellucci, E. Grosholz, & E. Ippoliti, Cambridge : Cambridge Scholars Publishing, 205–217.
- DUGAC, Pierre [1976], *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris : Vrin.
- EDWARDS, Harold M. [1980], The genesis of ideal theory, *Archive for History of Exact Sciences*, 23, 321–378.
- EPPLE, Moritz [2003], The end of the science of quantity : Foundations of analysis 1860-1910, dans *A History of Analysis*, édité par N. Jahnke, H. Providence : American Mathematical Society, 291–323.
- FERREIRÓS, José [2007], *Labyrinth of Thought : A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Boston : Birkhäuser.
- GEYER, Wulf-Dieter [1981], Die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen nach Dedekind und Weber, dans *Richard Dedekind, 1831/1981 : Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, édité par W. Scharlau, Braunschweig : Vieweg, 109–133.
- HOUZEL, Christian [2002], *La Géométrie algébrique. Recherches historiques*, Paris : Blanchard.
- JAHNKE, Hans Niels & OTTE, Michael [1981], Origins of the program of “arithmetization of mathematics”, dans *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, édité par H. Mehrrens, H. Bos & I. Schneider, Boston : Birkhäuser, 21–49, doi :dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9491-4_3.

- KLEIN, Félix [1895], Über Arithmetisierung der Mathematik, dans *Nachrichten der König. Gesel. der Wissen. Göttingen. Geschäftliche Mitteilungen*, édité par R. Fricke & H. Vermeil, Berlin ; Heidelberg : Springer, 82–91, reproduit dans *Felix Klein Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, 1921, vol. 1 édité par Fricke, R. et Vermell, H., Berlin : Springer, 232–240. Trad. fr. A. V. Vassilieff, L. Laugel, 1897, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 3, 16, 114–129, URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-51958-1_14.
- PETRI, Birgit & SCHAPPACHER, Norbert [2007], On arithmetization, dans *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones arithmeticae*, édité par C. Goldstein, N. Schappacher & J. Schwermer, Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 343–374.
- RIEMANN, Bernhard [1851], Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, dans *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, édité par R. Dedekind, H. Weber, M. Noether & W. Wirtinger, Leipzig : Teubner, 3–46, reproduit dans [Riemann 1876-1902, 3–46].
- [1876-1902], *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Leipzig : Teubner, edited by Dedekind, R., Weber, H., Noether, M., and Wirtinger, W.
- SCHAPPACHER, Norbert [2010], Rewriting points, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Hyderabad, India, 3258–3291.
- SCHARLAU, Winfried [1981], *Richard Dedekind, 1831/1981 : Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, Braunschweig : Vieweg.
- SIEG, Wilfried & SCHLIMM, Dirk [2005], Dedekind's analysis of number : systems and axiom, *Synthese*, 147(1), 121–170.
- STILLWELL, John [2012], *Theory of Algebraic Functions of One Variable*, Providence, R.I. : American Mathematical Society, trad. angl. de [Dedekind & Weber 1882].
- STROBL, Walter [1982], Über die Beziehung zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Functionen von Dedekind und Weber, dans *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, t. 33, 225–246.
- TAPPENDEN, Jamie [1995], Geometry and generality in Frege's philosophy of arithmetic, *Synthese*, 102, 319–361.